ANA1 Kurvendiskussion, Extremwert Problem, Tangentenverfahren

John Truninger

Symmetrie

- gerade → Achsensymetrisch $f(-x) = f(x)$
- ungerade → Punktsymetrisch $f(-x) = -f(x)$

Monotomie

$$f'(x) = \begin{cases} > 0, & \text{streng monoton steigend} \\ < 0, & \text{streng monoton fallend} \\ = 0, & \text{horizontale Tangente} \end{cases}$$

Beispiel:
$f(x) = (2-2x-x^2) \cdot e^{1-x}$
$f'(x) = (-2-2x) \cdot e^{1-x} + (2-2x-x^2) \cdot -e^{1-x} = (-4+x^2) \cdot e^{1-x}$
$x_0 = \{-2, 2\}$

streng steigend bei $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$
streng fallend bei $(-2, 2)$

Krümmung

$$f''(x) = \begin{cases} > 0, & \text{Kurve nach links gekrümmt} \to \text{konvex} \\ < 0, & \text{Kurve nach rechts gekrümmt} \to \text{konkav} \\ = 0, & \text{Kurve nicht eindeutig gekrümmt} \end{cases}$$

Beispiel:
$f'(x) = (-4+x^2) \cdot e^{1-x}$
$f''(x) = 2x \cdot e^{1-x} + (-4+x^2) \cdot -e^{1-x} = (-x^2+2x+4) \cdot e^{1-x}$
$x_0 = x^2 - 2x + 4 = 0 \to$ Mitternachtsformel
$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5}$

konvex bei $(1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{5})$
konkav bei $(-\infty, 1-\sqrt{5}) \cup (1+\sqrt{5}, \infty)$

Relative Extrema

$$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) = \begin{cases} > 0, & \text{relatives Minimum} \\ < 0, & \text{relatives Maximum} \\ = 0, & \text{Wende- oder Sattelpunkt} \end{cases}$$

rel. Minimum → Tiefpunkt: $T = (x_1, f(x_1))$
rel. Maximum → Hochpunkt: $H = (x_2, f(x_2))$

falls $f''(x_0) = 0$ noch ableitbar, weiter ableiten jedoch immer nur in 2er Schritte

Beispiel:
$f(x) = x^4$
$f'(x) = 4x^3 \quad \to \quad x_0 = 0$
$f''(x) = 12x^2 \quad \to \quad x_0 = 0$
$f'''(x) = 24x \quad \to \quad x_0 = 0$
$f''''(x) = 24 \quad \to \quad x_0 = 24 \quad \to$ relatives Minimum

Wendepunkt und Sattelpunkt

- Wendepunkt, änderung der Krümmung
- Sattelpunkt, Spezialfall Steigung $= 0$ $\to f'(x) = 0$

$$\begin{cases} f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0, & \text{Wendepunkt} \\ f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0 \wedge f'(x_0) = 0, & \text{Sattelpunkt} \end{cases}$$

$$f^{(n)} = \begin{cases} \text{gerade, relatives Extremum,} & f^{(n)}(x_0)(> \vee <)0 \\ \text{ungerade, } x_0 \text{ Wendepunkt,} & \to \text{Sattelpunkt} \end{cases}$$

Wendepunkt: $W = (x_0, f(x_0))$
Sattelpunkt: $S = (x_0, f(x_0))$
Steigung Wendetangente: $f'(x_0)$

Beispiel:
$f(x) = x^5$
$f'(x) = 5x^4 \quad \to \quad x_0 = 0$
$f''(x) = 20x^3 \quad \to \quad x_0 = 0$
$f'''(x) = 60x^2 \quad \to \quad x_0 = 0$
$f^{(4)} = 120x \quad \to \quad x_0 = 0$
$f^{(5)} = 120 \quad \to \quad x_0 = 120$ → Wendepunkt da $f'(x_0) \neq 0$

Inhalt der Kurvendiskussion

1. Definitionsbereich und Wertebereich
2. Symetrie (evtl. auch Periodizität)
3. Schnittpunkte mit Koordinatenachsen (x, y)
4. Polstellen, hebbare Definitionslücken:
   Polstelle → nicht hebbar, nicht definiert
   heb. Definitionslücke → Gleichung umstellen/kürzen
5. Verhalten für $x \to \pm\infty$
6. rel. Extrema → Typenbestimmung
7. Wendepunkte/Sattelpunkte → Typenbestimmung
8. Asymptote (schief): Polynomdivision, Term ohne Rest
   schiefe Asympt: ∞ von $f(x)$
   senkrechte Asympt: Nullstelle von unter Bruch

	f	f'	f''	f'''
Nullstelle	$f(x) = 0$	-	-	-
Hochpunkt		$f'(x) = 0$	$f''(x) < 0$	-
Tiefpunkt		$f'(x) = 0$	$f''(x) > 0$	-
Sattelpunkt		$f'(x) = 0$	$f''(x) = 0$	$f'''(x) \neq 0$
Wendepunkt		-	$f''(x) = 0$	$f'''(x) \neq 0$

Extremwert Problem

Vorgehen:
1. Zielfunktion / Definitionsbereich definieren
2. Evtl. f Funktion von 2 Variabeln $f(x, y)$
3. Nebenbedingungen definieren → in Funktion einsetzen
4. Gleichung ableiten und nach 0 auflösen → $f'(x) = 0$
5. Bestimmung max. oder min. Extremwert

→ wenn Extremum am Rand evtl. nicht findbar druch $f'(x) = 0$

Beispiel:
Konservendose $V = 1000cm^3$ → minimale Oberfläche

$r = ? \quad \to \quad r > 0$
$h = ? \quad \to \quad h > 0$

Oberfläche minimieren:
$O(h, r) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$
→ 2 Variabeln benötigt Nebenbedingung

$V(h, r) = 1000 = \pi r^2 h \quad \to \quad h = \frac{1000}{\pi r^2}$

$O(r) = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot \frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$

$O'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0$
$O'(r) = 4\pi r = \frac{2000}{r^2}$

$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 5.42$
$h = \frac{1000}{\pi r^2} = 10.84$

Tangentenverfahren nach Newton

DEF: Annäherung an 0 Punkt

Ablauf:
1. Startwert x_0 wählen (genug nahe an 0 Punkt)
2. 1. Ableitung der Funktion f berechnen
3. Nächster N-ter Schritt:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Good to Know:

- Startpunkt genug nahe wählen
- falls $f(x) = 0$ mehrere Lösoungen → Verfahren für jede Lösung seperat anwenden
- Pro Iteration wird Genauigkeit der Stellen verdoppelt:
  1. $x_1 = 1$
  2. $x_2 = 0.1$
  3. $x_3 = 0.001$
  4. $x_4 = 0.0000001$

Beispiel:

$f(x) = x^2 + 2 = e^x$
$f(x) = x^2 + 2 - e^x$

$f'(x) = 2x - e^x$

Nächster Schritt:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 + 2 - e_n^x}{2x_n - e_n^x}$$

Lösungstabelle:

n	x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$f'(x_{n-1})$	x_n
1	1,5	–0,2317	–1,4817	1,3436
2	1,3436	–0,0276	–1,1456	1,3195
3	1,3195	–0,0005	–1,1026	1,3190
4	1,3190	+0,0000	–	–