ANA1 Polynomfunktionen

John Truninger

LaTeX

Allgemein

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

n = Grad der Funktion
a = Koeffizienten der Funktion

Darstellung der Polynomfunktion:

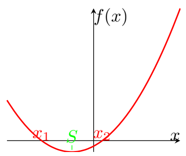
- Produktform → falls $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Nullstellen existieren

$$f(x) = y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Scheitelpunktsform → $S = (x_0, y_0)$

$$f(x) = y = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + y_0$$

$$S = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$



Funktionsoperationen

$f + g$	$x \to f(x) - g(x)$	Addition (Grad unverändert)
$f - g$	$x \to f(x) - g(x)$	Subtraktion (Grad unverändert)
$f \cdot g$	$x \to f(x) \cdot g(x)$	Multiplikation (Grad erhöht)
f / g	$x \to \frac{f(x)}{g(x)}$	Division (Grad verringert)
$c \cdot f$	$x \to c \cdot f(x)$	Konstante (Grad unverändert)

Komposition:
$f : A \to B$ $g : B \to C$ $g \circ f : A \to C$

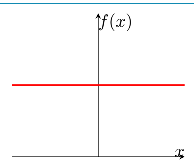
$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Umkehrfunktion (nur wenn bijektiv):
$f^{-1}(x)$ Funktion nach x auflösen → x mit y tauschen:

$f(x) = 2x + 1 \to y = 2x + 1 \to x = \frac{y-1}{2} \to f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

Polynom Grad 0

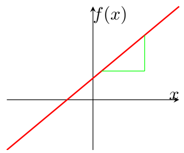
$$f(x) = a_0 \to a \neq 0$$



Nullstelle berechnen: $x_0 \to \nexists$

Polynom Grad 1

$$f(x) = mx + b \to m \neq 0$$



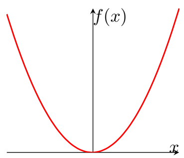
Nullstelle berechnen: $x_0 = -\frac{b}{m}$

Weitere Darstellungen:

- Punkt Steigungsform $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- Zwei Punkte Form $m = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Polynom Grad 2

$$f(x) = ax^2 + bx + c \to a \neq 0$$

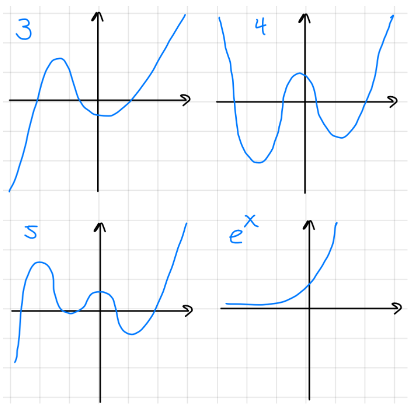


Nullstellen berechnen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$D = b^2 - 4ac \begin{cases} < 0 & \text{keine Nullstellen} \\ = 0 & \text{1 Nullstelle} \\ > 0 & \text{2 Nullstellen} \end{cases}$$

Polynom Grad 3, 4, 5



Nullstellen

- Grad 1 → 1x Nullstelle:

$$x_0 = -\frac{b}{a}$$

- Grad 2 → 2x Nullstellen:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$D = b^2 - 4ac \begin{cases} < 0 & \text{keine Nullstellen} \\ = 0 & \text{1 Nullstelle} \\ > 0 & \text{2 Nullstellen} \end{cases}$$

- Grad 3 → Mit Polynomdivison Grad reduzieren
Polynomdivison:

$$\begin{array}{l} (\;x^3 + 8x^2 + 13x + 6) : (x+1) = x^2 + 7x + 6 \\ \underline{-x^3 \;\; -x^2} \\ \qquad 7x^2 + 13x \\ \qquad \underline{-7x^2 \;\; -7x} \\ \qquad\qquad 6x + 6 \\ \qquad\qquad \underline{-6x - 6} \\ \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

→ Wiederholen bis Grad 2 erreicht und mittels Mitternachtsformel Nullstellen berechnen
Bei Rest (nicht Nullstellen): → $\frac{Rest}{Divisor}$

Faktorisierung:
Nullstellen durch ausklammern von x:

$x^4 - 5x^3 + 6x^2$
$= x^2(x^2 - 5x + 6)$
$= x^2(x - 3)(x - 2)$
$\mathbb{L} = \{0, 3, 2\}$ → doppelte Nullstelle $x = 0$

Ausklammern:
$x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$
$\to -1 + 3 = 2(x)$
$\to -1 \cdot 3 = -3$

Binomische Formeln:
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Versch. Definitionen & Eigenschaften

Funktionen aufstellen:

- Grad der Funktion
- Nullstellen
- mittels Punkt Faktor herausfinden

Bsp.
$f(x) \to$ Grad 3 $x_0 = \{1, 3, 4\}$ $P(6, 300)$

$f(x) = a(x - 1)(x - 3)(x - 4)$
$a \to 300 = a(6 - 1)(6 - 3)(6 - 4) \to a$ einsetzen & ausrechnen

Symetrien:

- gerade → Achsensymetrisch

$$f(-x) = f(x)$$

- ungerade → Punktsymetrisch

$$f(-x) = -f(x)$$

Periodizität:

$$f(x + T) = f(x)$$

Monotonie:

- monoton steigend/wachsend $\to x_1 \leq x_2$
- monoton fallend $\to x_1 \geq x_2$

Bijektivität:

- Injektiv: Wertebereich Wert max. 1x
- Surjektiv: Wertebereich Wert min. 1x
- Bijektiv: Wertebereich Wert genau 1x → umkehrbar

Horner Schema

Berechnungen von Funktionswerten, Nullstellen, Ableitungen:

$p(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ $x = 2$

$= (((2x - 3)x + 4)x - 5)x + 6$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \\ \underline{2} & & 4 & 2 & 12 & 14 \\ \hline & 2 & 1 & 6 & 7 & 20 \end{array} \longrightarrow f(2) = \underline{\underline{20}}$$