ANA2 Differential Gleichungen

John Truninger

LATEX

Definition

Gleichung, die Funktion f und Ableitungen von f enthält.
Lösung von DGL ist differenzierbare Funktion, welche die Gleichung erfüllt.

- DGL aufgelöst nach y^n heisst explizit sonst implizit.

Beispiel:

$$y' = -\frac{x}{y} \quad \rightarrow \quad y = \pm\sqrt{c - x^2}$$

Lösung überprüfen

$y' = x + y$ $\qquad$ $y_1 = e^x - 1, \quad y_2 = -x - 1$

Test: $y_1 = e^x - 1 \quad y_1' = e^x$:
$e^x = x + e^x - 1 \quad \rightarrow \quad x = 1$ $\qquad$ $\rightarrow$ keine Lösung

Test: $y_2 = -x - 1 \quad y_2' = -1$:
$-1 = x - x - 1 \quad \rightarrow \quad -1 = -1$ $\qquad$ $\rightarrow$ Lösung

Anfangswert Problem

$y' = x - 4 \quad y(2) = 9$ $\qquad$ $\rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + C$

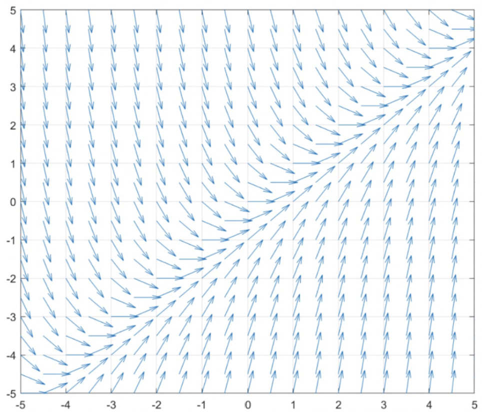
Einsetzen von $y(2) = 9$:
$9 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + C \quad \rightarrow \quad C = 15$

Lösung: $\quad y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 15$

Geometrische Betrachtung

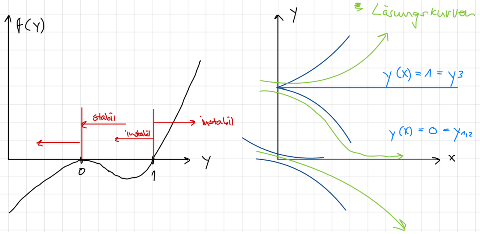
Funktionswerte geben Steigungen an (2D)

DGL: $y' = x + y$ $\qquad$ Allgemeine Lösung: $y = C \cdot e^x + x - 1$



Richtungsfelder

$y' = y^2(y-1)$
$f(y) = y^2(y-1) \rightarrow y_{1,2} = 0, \; y_3 = 1$



Vorgehen:
Nullstellen bilden konstante Lösungen

kleiner Funktionswert links von Nullstelle:
- y' negativ: $\rightarrow$ instabil (geht von Nullstelle weg)
- y' positiv: $\rightarrow$ stabil (geht auf Nullstelle zu)

kleiner Funktionswert rechts von Nullstelle:
- y' negativ: $\rightarrow$ stabil (geht auf Nullstelle zu)
- y' positiv: $\rightarrow$ instabil (geht von Nullstelle weg)

Semistabil: wenn eine Seite stabil und andere instabil

Steigung:
$m = \frac{y}{x}$ $\qquad$ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $\qquad$ $\rightarrow$ y auf x Wert

Definition DGL Art

Separierbare DGL wenn umformbar zu:

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y) \quad \rightarrow \quad \int \frac{1}{h(y)} \cdot dy = \int g(x) \cdot dx$$

- $g(x)$ Funktion von x
- $h(y)$ Funktion von y

Lineare DGL 1. Ordnung wenn umformbar zu:

$$y' + f(x) \cdot y = g(x) \quad \rightarrow \quad y = e^{-F(x)} \cdot \int g(x) \cdot e^{F(x)} \, dx$$

- $f(x)$ Faktor von y
- $g(x)$ Funktion von x

Separierbare DGL

$y' = g(x) \cdot h(y)$ $\qquad$ separierbar: $y' = g(x) \cdot h(y)$
autonom: $y' = h(y)$

Vorgehen:

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{h(y)} \cdot dy = g(x) \cdot dx$$

$$\int \frac{1}{h(y)} \, dy = \int g(x) \, dx \quad \rightarrow \quad \text{nach } y \text{ auflösen und } +c$$

Beispiel:

$$y' = e^{x-y} \longrightarrow y' = \frac{e^x}{e^y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^y} \longrightarrow \int e^y \, dy = \int e^x \, dx$$

$$e^y = e^x + C \xrightarrow{\ln(\dots)} \underline{\underline{y = \ln(e^x + C)}}$$

Falls noch $y(0) = 1$: $\qquad$ $x = 0$ einsetzen und c berechnen.

Lineare DGL 1. Ordnung

$y' + f(x) \cdot y = g(x)$ $\qquad$ homogen: $y' + f(x)y = 0$
inhomogen: $y' + f(x)y = g(x)$

Sehr oft Partielle Integration nötig.
Wahl von $u(x)$ / Reihenfolge für Ableiten $u \rightarrow u'$:
1. $\ln$ und $\log$
2. Polynome

Vorgehen:

$$y = e^{-F(x)} \cdot \int g(x) \cdot e^{F(x)} \, dx$$

Beispiel:

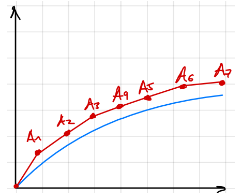
$$y' = x - y + 1 \Longrightarrow \boxed{y' + y = x + 1}$$

$f(x) = 1 \longrightarrow F(x) = x$ $\qquad$ $e^{-F(x)} = e^{-x}$, $\quad e^{F(x)} = e^{x}$

$g(x) = x + 1$

$$\begin{aligned} y &= e^{-x} \cdot \int (x+1)\, e^x \, dx = e^{-x} \int x e^x \, dx + \int e^x \, dx \\ &= e^{-x} \left(e^x \cdot x - \int e^x \, dx + e^x \right) \\ &= e^{-x} \left(e^x \cdot x - e^x + e^x + C \right) \\ &= x - 1 + 1 + Ce^{-x} \\ &= \underline{x + Ce^{-x}} \end{aligned}$$

Numerisches Verfahren Eulerverfahren



A_n: Ableitung (Steigung) im Punkt

$x = x_k + m \cdot (t - t_k)$

$m = f(t_k, x_k)$
$h = (t - t_k)$

- Für Anfangswert Probleme 1. Ordnung
- Möglichst kleiner Fehler (nahe Approximieren)

Approximations Schrittweite: $\qquad$ $t_k = t_0 + k \cdot h$
Approximations Wert: $\qquad$ $x_{k+1} = x_k + h \cdot f(t_k, x_k)$

Note: $\quad x_{k+1}$ Formel kürzen wenn möglich

Beispiel 1:

$x(t) = 2x + t$ $\qquad$ $\underbrace{x(0)}_{t_0} = \underbrace{1}_{x_0}$ $\qquad$ $h = 0{,}25$

$t_k = t_0 + k \cdot h = \underline{0 + k \cdot 0{,}25}$

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + h \cdot (2x + t) = x_k + 2hx_k + ht \\ &= x_k + \tfrac{1}{2}x_k + \tfrac{1}{4}t = \underline{\tfrac{3}{2}x_k + \tfrac{1}{4}t} \end{aligned}$$

$k = 0$ $\qquad$ $\underline{t_0 = 0}$ $\qquad$ $\underline{x_0 = 1}$
$k = 1$ $\qquad$ $t = 0{,}25$ $\qquad$ $x = \frac{3}{2}x_0 + \frac{1}{4}t_0 = \frac{3}{2}$
$k = 2$ $\qquad$ $t = 0{,}5$ $\qquad$ $x = \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}t = \frac{37}{16}$

Beispiel 2:

$y' \cdot y = x - 1 \rightarrow y' = \frac{x-1}{y}$ $\qquad$ $y\underbrace{(0)}_{x_0} = \underbrace{5}_{y_0}$

$y(x) = \frac{x-1}{y}$ $\qquad$ $f(x,y) = \frac{x-1}{y}$ $\qquad$ $h = 1$

$x_k = x_0 + k \cdot h = 0 + k \cdot 1 = \underline{k}$

$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x,y) = \underline{y_k + \frac{x-1}{y}}$

$k = 0$ $\qquad$ $\underline{x_0 = 0}$ $\qquad$ $\underline{y_0 = 5}$
$k = 1$ $\qquad$ $x_1 = 1$ $\qquad$ $y_1 = 5 + \frac{0-1}{5} = 4{,}8$
$k = 2$ $\qquad$ $x_2 = 2$ $\qquad$ $y_2 = 4{,}8 + \frac{1-1}{4{,}8} = 4{,}8$

Verringerung des Fehlers:
- Schrittweite h verkleinern
- Fehler proportional zu h