ANA2 Erweitertes Integral

John Truninger

LaTeX

Ansatz & Korrektur Methode

1. Ansatz für Integration aufstellen: $A(x) = F(g(x))$
2. Ansatz Ableiten $A'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$
3. Korrektur Faktor bestimmen

Beispiel:

$\int \sin(x) \cdot e^{\cos(x)}\ \mathrm{dx} \quad \rightarrow \quad A(x) = -e^{\cos(x)} + c$

1. Ansatz: $A(x) = e^{\cos(x)}$
2. Ableiten: $A'(x) = e^{\cos(x)} \cdot -\sin(x)$
3. Korrektur: $-1 \rightarrow \frac{1}{k} \cdot A(x) + c = -e^{\cos(x)} + c$

Anwendung Integrations Methoden

Partialbruchzerlegung:

- gebrochene rationale Funktion → Polynomdivision
- echt gebrochene rationale Funktion
- Bsp: $\frac{x^2+x+2}{x+1}, \frac{x^2+1}{x^2+2x+2}$

Substitution:

- Produkt verketteter/zusammenhängender Funktion
- Ableitung innere Funktion bis auf Faktor erkennbar
- Bsp: $x \cdot \cos(x^2), x\sqrt{1+x^2}$

Partielle Integration:

- Produkt von zwei einfachen Funktionen
- Bsp: $x \cdot \sin(x), x \cdot e^x, \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2} \cdot \ln(x)$

Partielle Integration

Unbestimmtes Integral:

$$\int u(x) \cdot v'(x)\ \mathrm{dx} = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\ \mathrm{dx}$$

Bestimmtes Integral:

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\ \mathrm{dx} = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\ \mathrm{dx}$$

Regeln:

- $u'(x)$ muss einfacher werden
- Wahl von $u(x)$:
  1. *ln / log*
  2. Polynome

Beispiel:

$\int x \cdot e^x\ dx \Rightarrow \quad u = x,\ v' = e^x \quad u' = 1,\ v = e^x$

$u \cdot v - \int u' \cdot v = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x$

$= e^x(x-1) + c$

Partialbruchzerlegung

1. Nullstellen von Nennerpolynom
2. Zuordnung Partialbruch zu jeder Nullstelle

$f(x) = \underbrace{\frac{A}{(x-x_1)}}_{\text{ein fach}} + \underbrace{\frac{B_1}{(x-x_2)} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2}}_{\text{doppelte Nullstelle}} + \dots$

3. Koeffizienten bestimmen
4. Hauptnenner bilden
5. Nullstellen einsetzen oder Koeffizientenvergleich
6. Integral berechnen

Regeln:

- $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ falls $p \leq q \quad \rightarrow$ Polynomdivision: Zahl + $(\frac{\text{Rest}}{q(x)})$
- Falls Nennerpolynom nicht zerlegbar → Linearfaktorenzerlegung
- Shortcuts:

$$\int \frac{x-\beta}{(x-\beta)^2+\lambda^2}\ \mathrm{dx} = \ln\sqrt{(x-\beta)^2+\lambda^2} + c$$

$$\int \frac{1}{(x-\beta)^2+\lambda^2}\ \mathrm{dx} = \frac{1}{\lambda} \cdot \arctan\left(\frac{x-\beta}{\lambda}\right) + c$$

Wenn fehlende reelle Nullstellen:

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)} dx \quad \rightarrow \quad \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Auch wenn doppelte Nullstellen oder verschiedene Nullstellen fehlen!

Beispiel:

$\int \frac{1}{x^2-1} = \int \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1}$

$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A \cdot (x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} + \frac{B \cdot (x-1)}{\cancel{(x+1)}(x-1)}$

$1 = Ax + A + Bx - B$

I: $1 = A - B \rightarrow B = -\frac{1}{2}$

II: $0x = Ax + Bx \rightarrow A = -B = \frac{1}{2}$

$\int \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} = \int \frac{1}{2x-2} - \frac{1}{2x+2}$

Substitution

$\int x \cdot \cos(x^2)\ \mathrm{dx} \quad \rightarrow u = x^2 \rightarrow \frac{du}{dx} = u' = 2x \rightarrow dx = \frac{du}{2x}$

Bestimmtes Integral:

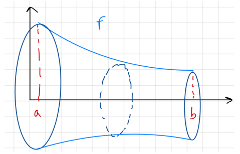
$\int_a^b f(x)^2\ \mathrm{dx} = \int_{u(a)}^{u(b)} u^2\ \mathrm{du} \quad \rightarrow u = f(x) \quad dx = \frac{du}{f'(x)}$

Beispiel:

$\int x\sqrt{1+x^2}\ \mathrm{dx} \quad u = \sqrt{1+x^2} \quad \mathrm{dx} = \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{1+x^2}} = \frac{u}{x}\ \mathrm{du}$

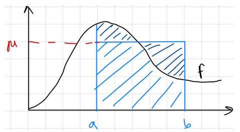
$\int x \cdot u \cdot \frac{u}{x}\ \mathrm{du} = \int u^2\ \mathrm{du} = \frac{1}{3} \cdot u^3 + c = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1+x^2}^3 + c$

Rotationsvolumen



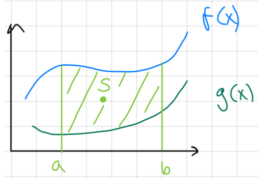
$$V = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2\ \mathrm{dx}$$

Mittelwert von Funktion



$$\mu = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\ \mathrm{dx}$$

Schwerpunkt



Schwerpunkt berechnen:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\ \mathrm{dx}$$

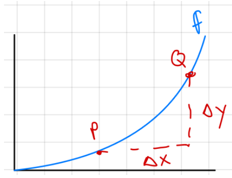
$$x_s = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x \cdot (f(x) - g(x))\ \mathrm{dx}$$

$$y_s = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2)\ \mathrm{dx}$$

Rotationskörper:

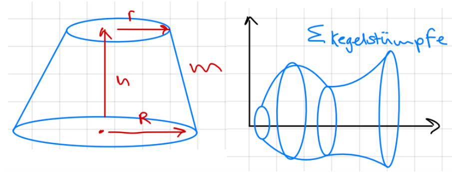
$$x_s = \frac{\pi}{V} \cdot \int_a^b x \cdot f(x)^2\ \mathrm{dx}$$

Länge einer Kurve



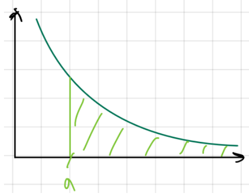
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\ \mathrm{dx}$$

Mantelfläche



$$M = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2}\ \mathrm{dx}$$

Uneigentliche Integrale



$\int_a^{\infty} f(x)\ \mathrm{dx}$

$\int_{-\infty}^{b} f(x)\ \mathrm{dx}$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{dx}$

Konvergent: gegen Wert
Divergent: gegen $\pm\infty$

Uneigentliche Integrale berechnen:

$$\int_a^{\infty} f(x)\ \mathrm{dx} = \lim_{\lambda \to \infty} \int_a^{\lambda} f(x)\ \mathrm{dx}$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\ \mathrm{dx} = \lim_{\lambda \to -\infty} \int_{\lambda}^{b} f(x)\ \mathrm{dx}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{dx} = \lim_{\lambda \to -\infty} \int_{\lambda}^{c} f(x)\ \mathrm{dx} + \lim_{\lambda \to \infty} \int_{c}^{\lambda} f(x)\ \mathrm{dx}$$

Integrand mit Pol

$\int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} \quad \rightarrow \quad$ Pol bei: $f(x) \rightarrow x = a$

Integrand mit Pol berechnen:

$$I = \int_a^b f(x)\ \mathrm{dx} = \lim_{\epsilon \to 0} I(\epsilon) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\ \mathrm{dx}$$