# ANA3 Fourier Transformation

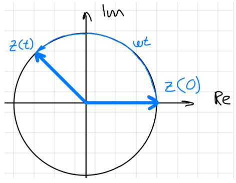
John Truninger

## Allgemein

$y_1(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$
$y_2(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

$y_2(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$

- $A$ Amplitude
- $\omega$ Kreisfrequenz
- $\varphi$ Phasenverschiebung



$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$ $\quad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$ $\quad \omega = \frac{2\pi}{T}$

---

**Komplexe Darstellungen** $\quad i = \sqrt{-1} \rightarrow i^2 = -1$

$z = a + bi$ $\quad \cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$z = r \cdot \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$ $\quad \sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$z = r \cdot e^{i\varphi}$ $\quad \tan(\varphi) = \frac{b}{a}$

## Überlagerungen von Schwingungen

$y_1 = A_1 \cdot \cos(\omega t + \phi_1)$
$y_2 = A_2 \cdot \cos(\omega t + \phi_2)$

$A = |A_1 + A_2| = |A_1 \cdot e^{i\phi_1} + A_2 \cdot e^{i\phi_2}|$
$\phi = \arg(A_1 + A_2) = \arg(A_1 \cdot e^{i\phi_1} + A_2 \cdot e^{i\phi_2})$

Argumentfunktion:

$$\arg(a+ib) = \begin{cases} \arctan(\frac{b}{a}) & \text{für } a > 0 \\ \arctan(\frac{b}{a}) + \pi & \text{für } a < 0 \text{ und } b \geq 0 \\ \arctan(\frac{b}{a}) - \pi & \text{für } a < 0 \text{ und } b < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } a = 0 \text{ und } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } a = 0 \text{ und } b < 0 \\ \text{undefiniert} & \text{für } a = 0 \text{ und } b = 0 \end{cases}$$

Negative Amplitude um $\pi$ Phasenverschieben:
$y = -A \cdot \cos(\omega t + \phi) \quad \rightarrow \quad y = A \cdot \cos(\omega t + \phi + \pi)$

Schwingungen Umstellen $(\sin/\cos)$:
$y = A \cdot \sin(\omega t) = A \cdot \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$
$y = A \cdot \cos(\omega t) = A \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$

---

$y_1 = \cos(t) \qquad y_2 = \cos(t + \frac{\pi}{4})$

$y_1 = A_1 \cos(\omega t + \emptyset_1) \Rightarrow A_1 = 1, \ \emptyset_1 = 0$

$y_2 = A_2 \cos(\omega t + \emptyset_2) \Rightarrow A_2 = 1, \ \emptyset_2 = \frac{\pi}{4}$

Gesucht: $y = y_1 + y_2 = A \cos(\omega t + \emptyset)$

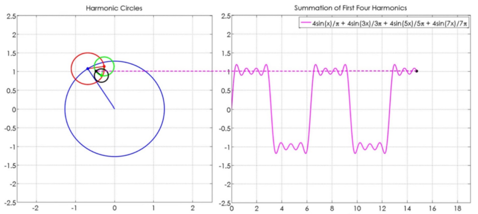
$A = |A_1 e^{i\emptyset_1} + A_2 e^{i\emptyset_2}| = |1 + \underbrace{e^{i\pi/4}}_{\underbrace{\cos(\frac{\pi}{4})}_{\text{x-Achse}} + \underbrace{i \cdot \sin(\frac{\pi}{4})}_{\text{y-Achse}}}| = |1 + \cos(\frac{\pi}{2}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{2})|$

$= \sqrt{(1 + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = \underline{1,8478}$

$\emptyset = \arg(A_1 e^{i\emptyset_1} + A_2 e^{i\emptyset_2}) = \arg(1 + e^{i\frac{\pi}{4}}) = \arg(1 + \cos(\frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{4}))$

$= \arg(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = \underline{0,3926}$

## Fourier Reihe



**reelle Darstellung**

$$f(t) \rightarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(k\omega t) + b_k \cdot \sin(k\omega t)$$

$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,\mathrm{dt}$ $\quad f$ ungerade: $a_0 = 0$

$a_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \cos(k\omega t)\,\mathrm{dt}$ $\quad f$ ungerade: $a_k = 0$

$b_k = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot \sin(k\omega t)\,\mathrm{dt}$ $\quad f$ gerade: $b_k = 0$

Note: Wenn $f$ auf $y$-Achse mit Konstante $C$ verschoben und $f' = f + C$ ungerade wird: $f' - A = f \ \rightarrow \ f' = f + A$

---

**zu reellem Amplituden Spektrum**

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(k\omega t + \phi_k)$$

$A_0 = \frac{a_0}{2}$ $\quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$

---

**komplexe Darstellung**

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k \cdot e^{ik\omega t}$$

$\hat{f}_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cdot e^{-ik\omega t}\,\mathrm{dt}$

---

Nur falls $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ somit gilt $\hat{f}_{-k} = \overline{\hat{f}_k}$

**reelle zu komplexe Darstellung**

$\hat{f}_0 = \frac{a_0}{2}$ $\quad \hat{f}_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$ $\quad \hat{f}_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$

**komplexe zu reelle Darstellung**

$a_0 = 2 \cdot \hat{f}_0$ $\quad a_k = 2 \cdot Rel(\hat{f}_k)$ $\quad b_k = -2 \cdot Im(\hat{f}_k)$

## Diskrete Fourier Reihe

Messwerte: $(\frac{2\pi k}{N}, f_k) \qquad 0 \leq k \leq N$

---

**reelle Darstellung**

$$p(x) = \frac{r_0}{2} + \sum_{l=1}^{N-1} (r_l \cdot \cos(lx) + q_l \cdot \sin(lx))$$

falls $N = 2M + 1$ ungerade:

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{M} (a_l \cdot \cos(lx) + b_l \cdot \sin(lx))$$

falls $N = 2M$ gerade:

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{M-1} (a_l \cdot \cos(lx) + b_l \cdot \sin(lx)) + \frac{a_M}{2} \cdot \cos(Mx)$$

**von Messwerten zu reellen Koeffizienten**

$$a_l = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cdot \cos(\frac{2\pi lk}{N}) \qquad b_l = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cdot \sin(\frac{2\pi lk}{N})$$

**von reellen Koeffizienten zu Messwerten**

falls $N = 2M + 1$ ungerade:

$$f_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{M} \left(a_l \cdot \cos\left(\frac{2\pi lk}{N}\right) + \cdot \sin\left(\frac{2\pi lk}{N}\right)\right)$$

falls $N = 2M$ gerade:

$$f_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{M-1} \left(a_l \cdot \cos\left(\frac{2\pi lk}{N}\right) + b_l \cdot \sin\left(\frac{2\pi lk}{N}\right)\right) + \frac{a_M}{2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi Mk}{N}\right)$$

## Diskrete Fourier Reihe 2

**komplexe Darstellung**

falls $f : R \rightarrow R$ dann gilt: $\hat{f}_{N-l} = \bar{\hat{f}_l}$

$$p(x) = \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}_l \cdot e^{ilx}$$

**von Messwerten zu komplexen Koeffizienten**

$$\hat{f}_l = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cdot e^{-2\pi i \cdot \frac{kl}{N}}$$

**von komplexen Koeffizienten zu Messwerten**

$$f_k = p\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}_l \cdot e^{2\pi i \cdot \frac{kl}{N}}$$

---

**von reeller Darstellung zu komplexer** $\quad$ falls $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\hat{f} = \frac{a_0}{2}$ $\quad \hat{f}_l = \frac{1}{2}(a_l - ib_l)$

**von komplexer Darstellung zu reeller** $\quad$ es existiert kein $b_0$

$a_l = 2 \cdot Rel(\hat{f}_l)$ $\quad b_l = -2 \cdot Im(\hat{f}_l)$