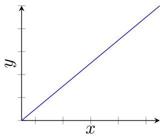
ANA3 Mehrdimensionale Differentialrechnung 1

John Truninger

Geometrische Typen

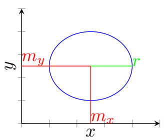
Gerade



$f(x) = ax + b$

- a: Steigung $= \frac{\Delta y}{\Delta x}$
- b: y-Achsenverschiebung

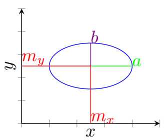
Kreis



$(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2 = r^2$

- r: Radius
- m_x: x Mittelpunkt
- m_y: y Mittelpunkt

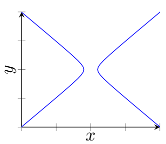
Ellipse



$$\frac{(x - m_x)^2}{a^2} + \frac{(y - m_y)^2}{b^2} = 1$$

- $2a$: Breite
- $2b$: Höhe
- m_x: x Mittelpunkt
- m_y: y Mittelpunkt

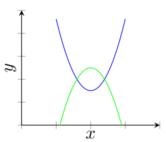
Hyperbel



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- $\begin{bmatrix} \pm a \\ 0 \end{bmatrix}$: Scheitelpunkte

Parabel



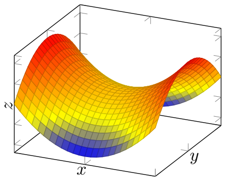
$y = ax^2 + bx + c$

- a: Krümmung
- $-\frac{b}{2a}$: Extremwert

Funktion mit 2 Variablen

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad (x, y) \to z = f(x, y)$

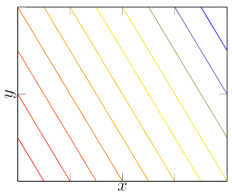
$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = f(x, y)\}$



$$f(x, y) = x^2 - y^2$$
$$z = x^2 - y^2$$

Niveaulinien

$$N_f(c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f(x, y) = c\}$$



$f(x, y) = -2x - y + 8$

- parallele Geraden
- Steigung -2

<u>Von Funktion zu Plot</u>

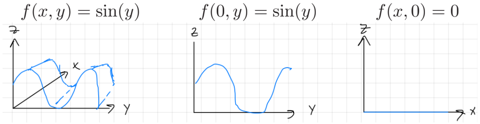
- c für Niveaulinien wählen $\to f(x, y) = c$
- geometrischer Typ bestimmen
- Qualitative Vergleiche
  - Kreis: Mittelpunkt, Radius
  - Ellipse: Mittelpunkt, $a < b$ oder $a > b$
  - Gerade: Steigung

<u>Von Plot zu Funktion</u>

- geometrischer Typ aus Plot lesen
- Zwei Punkte aus Niveaulinie: $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$

<u>Funktion Graph zuordnen</u>

$f(x, y) = \sin(y) \qquad f(0, y) = \sin(y) \qquad f(x, 0) = 0$



Funktionen mit 3 Variablen

$f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad (x, y, z) \to w = f(x, y, z)$

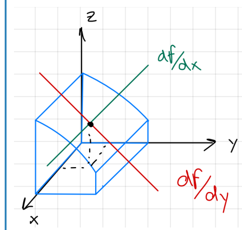
$\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 | w = f(x, y, z)\}$

Niveaulinien

$$N_f(c) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | f(x, y, z) = c\}$$

Gradient

Partielle Ableitung



$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Steigung der Funktion in x- bzw. y-Richtung

Gradient

<u>DEF:</u> Vektor aller partiellen Ableitungen, zeigt zur höchsten Anstiegsrichtung

$$grad(f) = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Beispiel: $f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2$

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung

<u>DEF:</u> Änderungsrate der Funktion in Richtung des Vektors $\vec{a}$

Mit Einheitsvektor

$$(D\vec{e}f)(x_0, y_0) = \nabla f(P_0) \cdot \vec{e} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

Mit beliebigem Vektor

$$(D\vec{a}f)(x_0, y_0) = \nabla f(P_0) \cdot \vec{a} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Note: Wenn $\vec{b}$ gesucht damit bei der Richtungsableitung $= 0$ ergibt: Skalarprodukt von $\nabla f(P_0)$ und $\vec{b}$ ist 0.

Tangentialebene

<u>DEF:</u> Ebene, die die Funktion in einem Punkt P_0 berührt und von Tangenten aufgespannt wird.

$z = f(x, y) \qquad P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

$$z = f(x_0, y_0) + fx(x_0, y_0)(x - x_0) + fy(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Beispiel: $f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 + 1 \qquad P_0(1.15, 0.15)$

$fx = 2(x - 1) \qquad fy = 2y$

$$\begin{aligned} z &= f(x_0, y_0) + fx(x_0, y_0)(x - x_0) + fy(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &= 0.15^2 + 0.15^2 + 1 + 2(0.15) \cdot (x - 1.15) + 0.3(y - 0.15) \\ &= 1.045 + 0.3x - 0.345 + 0.3y - 0.045 \\ &= 0.3x + 0.3y + 0.655 \end{aligned}$$

Totales Differential

<u>DEF:</u> Änderung Funktionswert bei kleiner Änderung Δx & Δy

$$\mathrm{df} = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{dy} \qquad \begin{aligned} \mathrm{dx} &= x - x_0 \to \Delta x \\ \mathrm{dy} &= y - y_0 \to \Delta y \end{aligned}$$

Effektiv Wert (approximation): $f(x, y) = f(x_0, y_0) + \mathrm{df}$

Beispiel: $f(x, y) = \frac{x \cdot y}{x - y} \qquad P_0(2, 1)$

$$\begin{aligned} \mathrm{df} &= f_x\,\mathrm{dx} + f_y\,\mathrm{dy} \\ &= \frac{y_0(x_0 - y_0) - x_0 \cdot y_0}{(x_0 - y_0)^2}\mathrm{dx} + \frac{x_0(x_0 - y_0) + x_0 \cdot y_0}{(x_0 - y_0)^2}\mathrm{dy} \end{aligned}$$

$$\mathrm{df}(2, 1) = \frac{1 - 2}{1}\mathrm{dx} + \frac{4}{1}\mathrm{dy} = -\mathrm{dx} + 4\,\mathrm{dy}$$

Für Punkt $P_1(2.1, 0.8)$:

$\mathrm{df}(2.1 - 2, 0.8 - 1) = f(2, 1) - (0.1) + 4(-0.2) = 1.1$

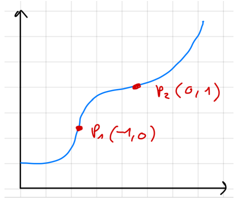
ANA3 Mehrdimensionale Differentialrechnung 2

John Truninger

LaTeX

Implizite Funktionen

<u>DEF:</u> Funktion, die nicht explizit nach einer Variablen aufgelöst ist



$F(x,y) = x^3 - y^3 + e^{xy} = 0$

$f'(x,y) \to$ nicht möglich

Lokale, implizite differenzierbare Funktion

$$F(x,y) = 0$$

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

- nicht für beliebiges $f'(x)$ in x
- Kurpenpunkt (x,y) muss bekannt Lösung von $F(x,y) = 0$ sein

Beispiel: $F(x,y) = x^3 - y^3 + e^{xy} = 0$ $\quad P_1(0,1)$

$$f'(x,y) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{3x^2 + ye^{xy}}{-3y^2 + xe^{xy}}$$

$$f'(P_1) = -\frac{1e^0}{-3} = \frac{1}{3}$$

Jacobi Matrix

$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ $\quad \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \quad (1 \le k \le n, 1 \le i \le m)$

$$J_f(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(p) \end{pmatrix}$$

Höhere Partielle Ableitungen

DEF: Krümmungsverhalten von der Funktionskuve (für Klassifikation von Extrema einer Funktion)

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Note: Wenn stetig, dann $f_{xy} = f_{yx}$

Hesse Matrix

<u>DEF:</u> Matrix aller zweiten partiellen Ableitungen einer Funktion

$$H_f(p) = \begin{pmatrix} f_{xx}(p) & f_{xy}(p) \\ f_{yx}(p) & f_{yy}(p) \end{pmatrix}$$

$\Delta(x_0, y_0) = det H_f(p) = f_{xx}(x_0,y_0) \cdot f_{yy}(x_0,y_0) - (f_{xy}(x_0,y_0))^2$

Beispiel: $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ $\quad P_0(1,1)$

$$f_{xx} = 2 \quad f_{xy} = 0$$
$$f_{yx} = 0 \quad f_{yy} = 2$$

$$H_f(P_0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Extremwerte

lokales Minimum:
- $\Delta(x_0,y_0) > 0$
- $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$

lokales Maximum:
- $\Delta(x_0,y_0) > 0$
- $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$

Sattelpunkt:
- $\Delta(x_0,y_0) \le 0$

Vorgehen:
1. Gradient bestimmen: $\nabla f(x_0, y_0)$
2. Gradient $= 0$ setzen: $\nabla f(x_0,y_0) \stackrel{!}{=} 0$
3. Gleichungssyetem lösen $\to$ Extremwert Kandidaten
4. Hesse Matrix bilden: $H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$
5. Kritische Punkte einsetzen und Typ bestimmen:
   (a) $\Delta(x_0,y_0) = det H_f(x_0,y_0)$
   (b) $\Delta(x_0,y_0)$

Beispiel: $f(x,y) = 3x^2 + 2y^3 - 6xy$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x - 6y \\ 6y^2 - 6x \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y) \stackrel{!}{=} 0 \to \begin{cases} 6x - 6y & = 0 \\ 6y^2 - 6x & = 0 \end{cases} \to P_1(0,0), \quad P_2(1,1)$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12y \end{pmatrix}$$

$\Delta(P_1) = det\ H_f(P_1) = 0 - 36 = -36 (< 0) \to$ Sattelpunkt

$\Delta(P_2) = det\ H_f(P_2) = 72 - 36 = 36 (> 0)$
$f_{xx}(P_2) = 6 > 0 \to$ lokales Minimum

Extremwerte mit Nebenbedingungen

Zu maximierende/minimierende Funktion: $F(x,y)$
Nebenbedingungen: $G_1(x,y) = 0, \cdots, G_n(x,y) = 0$

1. Funktionen in Worte fassen (min/max, soll)
2. Formeln einsetzen: soll $= 0$ setzen
3. Lagrange Funktion aufstellen:

$$L(x,y,\lambda) = F(x,y) + \lambda G_(x,y)$$
$$\nabla L(x,y,\lambda) \stackrel{!}{=} 0$$
$$L_x = \dots$$
$$L_y = \dots$$
$L_\lambda = \dots \to$ LGS lösen

4. Kandidaten finden:
   (a) unmögliche ausschliessen (zb. negative zahlen oder wenn 0 nicht möglich)
   (b) **Maximieren:** in $F(x,y)$ und Punkt mit max Wert wählen
   (c) **Minimieren:** in $F(x,y)$ und Punkt mit min Wert wählen

Beispiel: Aus Kreis mit Radius r soll möglichst grosses Rechteck mit b, h ausgeschnitten werden.

max. Funktion: $\frac{1}{6}bh^2$ $\quad F(b,h) = \frac{1}{6}bh^2$
Nebenbedingung: $b^2 + h^2 = 4r^2$ $\quad G(b,h) = b^2 + h^2 - 4r^2$

<u>Lagrange:</u>

$$L(b,h,\lambda) = F + \lambda G = \frac{1}{6}bh^2 + \lambda(b^2 + h^2 - 4r^2)$$

$$\nabla L(b,h,\lambda) \stackrel{!}{=} 0 \to \begin{cases} \frac{1}{6}h^2 + 2\lambda b & = 0 \\ \frac{1}{3}bh + 2\lambda h & = 0 \\ b^2 + h^2 - 4r^2 & = 0 \end{cases}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} \pm r \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} \pm \frac{2}{\sqrt{3}} r \\ \pm \frac{2}{\sqrt{\frac{8}{3}r}} \end{pmatrix}$$

Lösungsbedingung: $b, h > 0$ $\quad \to \quad P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} r \\ \frac{2}{\sqrt{\frac{8}{3}r}} \end{pmatrix}$