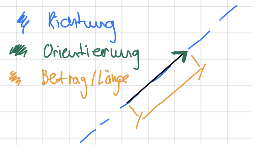
LA1 Vektoren

John Truninger

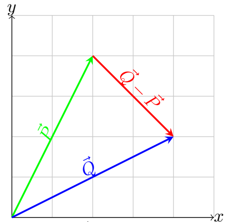
Vektoren Grundlagen

DEF: Vektor ($\vec{v}$) ist eine Grösse, welche eine Richtung, Orientierung und einen Betrag/Länge hat.



DEF: Vektoren sind identisch wenn Richtung, Orientierung und Betrag identisch sind.

Vektorentypen:
Ortsvektor:
Ursprung in Ebene/Raum (Nullpunkt)



$\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P}$

Nullvektor:
→ Anfangspunkt = Endpunkt → Betrag = 0
→ Linear abhängig

Einheitsvektor (Basisvektor):
→ Vektor mit Betrag = 1 (zb. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$)

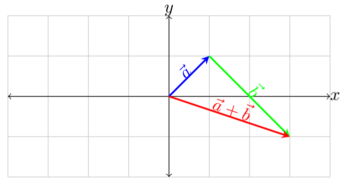
Gegenvektor:
→ Identisch andere Richtung $\vec{v} \to -\vec{v}$

Lagen:
parallel → Richtung, Orientierung sind identisch → $\vec{v} \uparrow\uparrow \vec{w}$
anti-parallel → Richtung identisch, Orientierung entgegengesetz → $\vec{v} \uparrow\downarrow \vec{w}$
kollinear → Richtung identisch sonst windschief, nicht-kollinear
orthogonal → Rechterwinkel → $\vec{v} \perp \vec{w}$
komplanar → 3 Vektoren auf gemeinsamer Ebene
lineare abhängigkeit → Vektoren kollinear und keine kombination/vielfache → $\det[V1 \quad V2 \quad V3] = 0$

Vektorräume:
$\mathbb{R}^0 = \{(0)\} \to 0(0,\dots,0)$
$\mathbb{R}^1 =]-\infty,\infty[= \{(x)|x \in \mathbb{R}\}$
$\mathbb{R}^2 = \{(x,y)|x,y \in \mathbb{R}\}$
$\mathbb{R}^n = \{(x_1,\dots,x_n)|\forall x_1 - x_n \in \mathbb{R}\}$

Vektor Addition $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$

DEF: Vektoren werden aneinander gehängt.

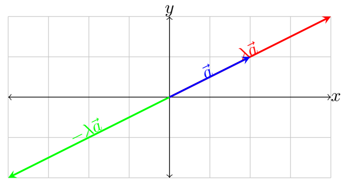


$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix}x_{a1}\\ \dots \\ x_{an}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_{b1}\\ \dots \\ x_{bn}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_{a1}+x_{b1}\\ \dots \\ x_{an}+x_{bn}\end{pmatrix}$$

Rechenregeln:
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ $\quad (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ $\quad \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

Skalarmultiplikation $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$

DEF: Stauchung, Streckung, Richtungswechsel des Vektors

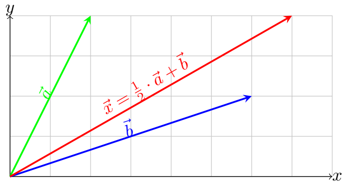


$$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \begin{pmatrix}x_1\\ \dots \\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda \cdot x_1\\ \dots \\ \lambda \cdot x_{an}\end{pmatrix}$$

$$\lambda = \begin{cases} >0, & \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a'} \\ <0, & \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a'} \\ =0, & \vec{a'} = 0 \end{cases}$$

Rechenregeln:
$(\lambda \cdot \gamma) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot (\gamma \cdot \vec{a})$ $\quad \lambda \cdot (\vec{a}+\vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$
$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ $\quad (\lambda + \gamma) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \gamma \cdot \vec{a}$

Linearkombination



$\vec{x} = \sum_{l=1}^{n} \alpha_1 \cdot a_1 + \dots + \alpha_n \cdot a_n$

Vektor Betrag $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$

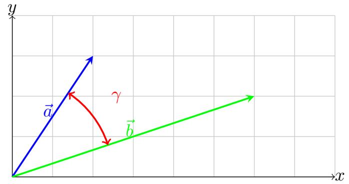
DEF: Länge eines Vektors $a = (a_1, \dots, a_n)$ heisst Betrag oder euklidische Norm

$\|\vec{a}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} = |\vec{a}|$

Rechenregeln:
$|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ $\quad |\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$
$|\vec{a}| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

Skalarprodukt $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^1$

DEF: Inneres Produkt oder Punktprodukt von zwei Vektoren



$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 \cdot b_1 + \dots + a_n \cdot b_n$

$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\gamma)$

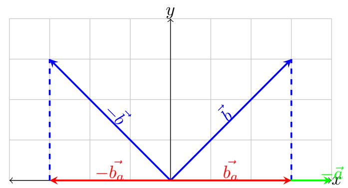
$\gamma = \arccos\left(\frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$ $\quad \gamma = \begin{cases} [0,\pi], & < 180 \deg \\ sonst, & > 180 \deg \end{cases}$

Orthogonalität:
$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$ $\quad \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \begin{cases} >0, & \text{spitzer Winkel} \\ =0, & \text{rechter Winkel} \\ <0, & \text{stumpfer Winkel} \end{cases}$

Rechenregeln:
$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$ $\quad \langle \vec{a}+\vec{b}, \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$
$\langle \lambda \cdot \vec{a}, \vec{b} \rangle = \lambda \cdot \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ $\quad \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \ge \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| = 0$

Orthogonale Projektion

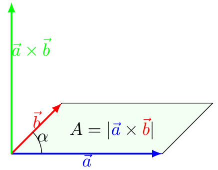
DEF: Vektor $\vec{b}$ wird auf $\vec{a}$ projziert.



$\vec{b_a} = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$ $\quad \lambda = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}^2|} \Leftrightarrow \vec{b_a} = \lambda \cdot \vec{a}$

$\gamma = \begin{cases} \in [0, \frac{\pi}{2}], & +\|\vec{b}\| \cdot \cos(\gamma) \\ \in [\frac{\pi}{2}, \pi], & -\|\vec{b}\| \cdot \cos(\gamma) \end{cases}$

Vektorprodukt/Kreuzprodukt $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$



$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y\\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z\\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x\end{pmatrix}$$

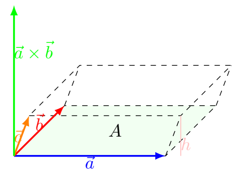
$A = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Rechenregeln:
$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ $\quad (\vec{a}+\vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
$\lambda \cdot \vec{a} \times \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times \lambda \cdot \vec{b}$ $\quad \vec{a} \times \vec{a} = 0$
$\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{c}$
$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \to$ Kolinear, kein Nullvektor, lineaer abhängig

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\alpha)$

Cauchy Ungleichung:
$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 \cdot \sin^2(\alpha)$
Es gilt: $|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \le \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \to$ wenn $= 0$, linear abhängig

Spatprodukt $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^1$



$$[\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}] = \langle \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c} \rangle = \begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}b_yc_z - b_zc_y\\ b_zc_x - b_xc_z\\ b_xc_y - b_yc_x\end{pmatrix}$$

$= \vec{a}_x(\vec{b}_y\vec{c}_z - \vec{b}_z\vec{c}_y) + \vec{a}_y(\vec{b}_z\vec{c}_x - \vec{b}_x\vec{c}_z) + \vec{a}_z(\vec{b}_x\vec{c}_y - \vec{b}_y\vec{c}_x)$

Rechenregeln:
- Vertauschen: zyklisch bleibt gleich, sonst Vorzeichenwechsel
- Wenn Spatprodukt = 0, dann sind Vektoren orthogonal und komplanar

$[\vec{a}+\vec{d} \quad \vec{b} \quad \vec{c}] = [\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}] + [\vec{d} \quad \vec{b} \quad \vec{c}]$
$\lambda \cdot [\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}] = [\lambda \cdot \vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}] = [\vec{a} \quad \lambda \cdot \vec{b} \quad \vec{c}]$
$[\vec{a} \quad \vec{a} \quad \vec{b}] = 0$

$$[\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}] = \begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}b_yc_z - b_zc_y\\ b_zc_x - b_xc_z\\ b_xc_y - b_yc_x\end{pmatrix}$$